240

DIPLOME VISE PAR LE MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE

ETABLISSEMENT PRIVE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR RECONNU PAR L'ETAT

22 BOULEVARD DU FORT DE VAUX 75017 PARIS - TÉL. 270.34.80/90.95

MATHÉMATIQUES (4 h)

Option Economique

EXERCICE 1 (5 points)

Une société fabrique et vend deux produits X et Y dont les prix de ventes respectifs sont de 27 F et 23 F par unit

Les prévisions de ventes mensuelles sont de 1 050 unités de X et de 650 unités de Y au maximum.

La fabrication est assurée sur 3 types de machines successifs M_1, M_2, M_3, ; le temps d'occupation de chaque machine p unité de produit étant donné par le tableau suivant.

	X	Y
M_1	19	31
M_2	5	4
M_3	5	23

en heures

Le temps total disponible mensuel par type de machine est :

pour M_1 = 29 450 heures

pour M_2 = 6 000 heures

pour M_3 = 16 100 heures

On demande :

1°) La mise en forme du problème.

2°) Déterminer le programme de fabrication rendant maximal le chiffre d'affaires. En particulier :

- donner ce chiffre d'affaires maximal au franc près ;
- indiquer la charge des différentes machines ,
- indiquer les quantités fabriquées des deux produits.

Ce tableau concerne l'exercice 2, dont l'énoncé figure page suivante

	x	y
Janvier 1974	1 000	- 2 000
Juillet 1974	4 000	- 1 000
Janvier 1975	1 000	- 2 000
Juillet 1975	- 1 000	- 5 000
Janvier 1976	- 3 000	- 7 000
Juillet 1976	- 2 000	- 8 000
Janvier 1977	0	- 6 000
Juillet 1977	0	- 5 000
Janvier 1978	- 2 000	- 10 000
Juillet 1978	1 000	- 3 000
Janvier 1979	- 5 000	- 6 000
Juillet 1979	- 5 000	- 8 000
Janvier 1980	- 2 000	- 6 000

en millions de francs

.../...

EXERCICE 2 (5 points)

On considère les deux séries statistiques semestrielles suivantes :

x = solde des mouvements de capitaux à long terme

y = solde hors emprunts extérieurs et hors opérations exceptionnelles

Le tableau relatif à cet exercice figure au bas de la page précédente.

(Source INSEE)

On demande de calculer en justifiant clairement la méthode choisie

1°) La meilleure valeur des x possible pour y = - 6 500

2°) La meilleure valeur des y possible pour x = - 6 000

3°) Une prévision sur x en janvier 1982

4°) Le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

PROBLÈME (10 points)

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto f(x) = \cos x + x \sin x$$

1°) a) Etudier les variations de l'application f. Montrer qu'il suffit de faire l'étude de f dans $\mathbb{R}^+$.

Dresser le tableau de variation pour $x \in [0 , 2\pi]$ puis, pour $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in [2n\pi , (2n + 2)\pi]$.

b) Tracer le graphe (Γ) de f dans un repère orthonormé.
On prendra $x \in [-\pi , 5\pi]$.

2°) Montrer que si on pose x_0, x_1, x_2,.... les abscisses rangées ($x_0 < x_1 < x_2 < ....$) des points de (Γ) où la tangente est parallèle à 0x, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on demande le premier terme et la raison
Donner la valeur de x_n ainsi que celle de $S_n = \sum_0^n x_i$.

3°) On pose $y_n = f(x_n)$ (voir 2e question)
Calculer en fonction de n les valeurs de y_n et de $T_n = \sum_0^n y_i$

4°) Etudier la concavité de (Γ). En déduire que les points d'inflexion de (Γ) se trouvent sur une courbe simple que l'on déterminera.

Etudier, pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre de points d'inflexion de (Γ) situés dans les intervalles
$[2n\pi , (2n + 1)\pi]$ et $[(2n + 1)\pi , (2n + 2)\pi]$

5°) Soit $\Phi(x) = \frac{1}{\lambda} . f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Déterminer λ pour que $\Phi(x)$ soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue réelle variant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

- Donner l'expression et faire le graphe de la fonction de répartition de cette variable aléatoire X.

- Calculer la probabilité de l'événement $\left(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{3}\right)$ puis de l'événement $\left(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{3}\right)$

- Calculer la probabilité de l'événement $\left(X < \frac{\pi}{6}\right)$ sachant que $\left(X < \frac{\pi}{4}\right)$.

- Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X).

6°) On considère la variable aléatoire continue réelle Y définie par $Y = X - \frac{\pi}{4}$. On demande :

a) La fonction de répartition de Y.

b) La densité de probabilité de Y.

c) L'espérance mathématique E(Y) et la variance V(Y).

FIN